4°MATH.

COURS.

1.

NOMBRES COMPLEXES.

III- ECRITURE EXPONENTIELLE.

1°- Notation …

2°- Définition …

3°- Propriétés …

4°- conséquences…

IV-NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS.

1°- Translation…

2°- Homothétie…

3°- Rotation…

III- FORME EXPONENTIELLE.

1°- Notation :

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe cosθ + i sinθ

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$e^{i\theta}$ désigne donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ :

$$\boxed{|e^{i\theta}| = 1 \text{ et } \operatorname{Arg}(e^{i\theta}) \equiv \theta\ [2\pi].}$$

Exemples : $e^{i0} = 1$; $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i2\pi} = 1$; $e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$.

2°- Définition :

Un nombre complexe Z non nul de module $r>0$ et d'argument θ s'écrit alors sous la forme $Z = re^{i\theta}$.
Cette écriture est appelée **une forme exponentielle** de Z.

3°- Propriétés :

- Pour tout réel θ et tout entier k ; on a
  $$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \text{ et } -e^{i\theta} = e^{i(\theta+(2k+1)\pi)}$$
- Pour tout réel θ ; on a $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$
- Pour tout réels θ et θ' et tout n$\in \mathbb{Z}$; on a
  - $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
  - $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
  - $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
  - $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ $\longrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

    C'est la **formule de MOIVRE.**

4°- Conséquences :

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$ $\longrightarrow$ce sont les **formules d'EULER.**

IV/- LES COMPLEXES ET LES TRANSFORMATIONS :

1°- Translation : ▲

Soit une translation de vecteur $\vec{U}$ d'affixe a ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que :

$\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$ donc z' - z = a d'où :

L'expression complexe d'une translation est : $\boxed{z' = z + a}$; où a est l'affixe du vecteur de translation.

2°- Homothétie : ▲

Soit une homothétie de rapport k ($\in$ IR*) et de centre Ω d'affixe w ;
Le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$ Donc z' - w = k. (z - w)

D'où **l'expression complexe d'une homothétie est :** $\boxed{z' - w = k.(z - w)}$;
Où w est l'affixe du centre et k le rapport de cette homothétie.

$f : P \longrightarrow P$

$M(z) \longrightarrow M'(z') \ / \ \boxed{z' = k.z + b}$ *où k un réel non nul.*

Si k=1 : on a identité.

Si k≠1 : on a homothétie de rapport k et de centre Ω $\left(\frac{b}{1-k}\right)$

3°Rotation : ▲

Soit une rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe w; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (affixe z') tel que : l'angle $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$

Donc z' - w = $e^{i\theta}$(z - w)

D'où **l'expression complexe d'une rotation est :** $\boxed{z' - w = e^{i\theta}(z - w)}$;
Où w est l'affixe du centre et q l'angle de cette rotation.

- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z.e^{i\theta}$ Où θ est un nombre réel fixé, est la rotation de centre O et d'angleθ.

$f : P \longrightarrow P$

$M(z) \longrightarrow M'(z') \;/\; \boxed{z' = a.\,z + b}$

Où a est un nombre complexe <u>de module 1.</u>

Si a=1 : on a identité.

Si a≠1 : on a rotation d'angle Arg(a) et de centre Ω $\left(\frac{b}{1-k}\right)$

- Le cercle de centre A d'affixe zA et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - zA| = r$

▲